



## Registros de Representações Semióticas e a utilização de ambiente de geometria dinâmica na aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica

*Arthur Barcellos Bernd*

*arthurbernd@gmail.com*

*Universidade Federal do Rio Grande do Sul*

**Resumo:** Este trabalho fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e propõe conexões desta teoria com ambientes de geometria dinâmica, através da utilização do software GeoGebra. A partir desta fundamentação teórica, apresenta-se o relato de experiência desenvolvido com uma turma de alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada de Porto Alegre/RS, atividade na qual os alunos foram convidados à resolução de problemas de Geometria Analítica que contemplavam a conversão dos registros de representação algébrica para a gráfica. Apresenta-se os resultados obtidos, que apontam para a compreensão dos objetos estudados a partir dos registros de representações semióticas envolvidos.

**Palavras-chave:** Registros de Representação Semiótica, geometria dinâmica, GeoGebra, geometria analítica.

### **Semiotic Representation Register and the use of Dynamic Geometry softwares in the learning of Analytic Geometry concepts**

**Abstract:** This work is based on Semiotic Representation Register Theory from Raymond Duval and proposes links between this theory and dynamic geometry softwares, using the software GeoGebra. From this theoretical foundation, is presented an experience developed with students from third year of secondary school of Porto Alegre/RS, activity in which the students were invited to solve problems that contemplated the conversion of registers from algebraic to graphic representation. The research presents results that indicates to understanding about the objects studied from the semiotic representation registers involved.

**Key-words:** Semiotic Representation Register, dynamic geometry, GeoGebra, analytic geometry.

## **1 Introdução**

A aprendizagem de matemática apresenta características próprias, distintas das observadas em outras áreas do conhecimento, e, portanto, a análise das dificuldades encontradas por estudantes necessita observar tais peculiaridades. Em especial, os objetos da matemática não são acessíveis de modo imediato – somente suas diferentes representações o são. Neste sentido, os registros de representação semiótica proporcionam um olhar atento às recorrentes e necessárias conversões nas formas de representação de objetos matemáticos e a importância destas conversões.

Segundo Duval (2009),

O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (...) Podemos então formular o paradoxo da compreensão em matemática da seguinte forma: como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação? (Duval, 2009, p. 21).

Neste sentido, Duval (2009) propõe que a efetiva aprendizagem das propriedades de um objeto ocorre justamente na passagem de um registro para outro, pois as diferentes representações apresentam conteúdos e atributos diferentes sobre um mesmo objeto. Duval (2009) é precisamente enfático a respeito da necessidade de se utilizar, no mínimo, duas formas distintas de representação: “essa é a única possibilidade de que se dispõe para não confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado” (Duval, 2009, p. 22).

No caso da geometria analítica, as representações semióticas utilizadas são a algébrica e a gráfica. Especialmente na passagem da primeira para a segunda, costuma-se observar dificuldades por parte dos estudantes. Dentre os possíveis fatores para estas dificuldades, acreditamos que a representação gráfica utilizando ambientes de geometria dinâmica – no nosso caso, o software GeoGebra – poderia ser uma alternativa à escrita à mão livre ou mesmo com poucos instrumentos facilitadores – como régua e compasso.

Segundo Palles e Silva (2012), pesquisas em Educação Matemática “têm indicado algumas tendências, principalmente, a respeito da influência da tecnologia no pensamento visual e dos aspectos semióticos e representacionais na visualização matemática”. É neste contexto que se insere a proposta de atividade que apresentamos neste trabalho, na qual propomos a utilização do GeoGebra na aprendizagem de conceitos de geometria analítica, buscando observar a compreensão dos estudantes na passagem da representação algébrica para a gráfica.

Inicialmente, apresentamos reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Passamos, então, a uma breve apresentação do software GeoGebra, particularmente quanto à sua utilização na representação de objetos no plano cartesiano. Em seguida, passamos à descrição das metodologias utilizadas na pesquisa e das atividades propostas. No item seguinte, analisamos os resultados da produção dos estudantes à luz da referida teoria. As considerações finais são apresentadas no último item e reúnem as últimas constatações pertinentes relativas a pesquisa.

## **2 Registros de Representação Semiótica e aprendizagem matemática**

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval trata da discussão dos processos cognitivos da aprendizagem de matemática. Duval (2012) explica que objetos matemáticos não são perceptíveis de imediato, diferentemente do que ocorre com objetos “reais”. Neste sentido, se faz necessário significar as representações semióticas de um objeto; segundo Duval (2012),

São produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (...) As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. (Duval, 2012, p. 269).

A compreensão em matemática contempla a utilização de diferentes formas de representações semióticas relativas a um mesmo conceito/objeto. Para além disso, é a transformação das representações semióticas que promove efetiva aprendizagem, como será aprofundado a seguir. Conforme Duval (2009), existem dois tipos de transformações de representações:

- Tratamentos: transformações que ficam dentro do mesmo sistema, como a resolução de uma equação;
- Conversões: transformações que mudam de sistema, mas contemplando o mesmo objeto, como a passagem da linguagem algébrica para a geométrica.

Visando evidenciar que a aprendizagem de matemática se caracteriza na capacidade do indivíduo de alterar a forma de registro, Duval (2009) caracteriza e diferencia a matemática, explicando que

Na matemática, diferentemente dos outros domínios de conhecimento científico, os objetos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.) O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (Duval, 2009, p. 21).

Dado que um objeto, quando representado em formas de registros diferentes, apresenta atributos distintos, é justamente a transformação de um tipo de registro para outro que permite a compreensão efetiva do objeto, de modo a não confundir-lo com sua representação ou mesmo limitá-lo a uma única representação. Duval (2009, p. 22) enfatiza que “é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro”.

O estudo de conceitos de geometria analítica, proposta de atividade que é exposta neste trabalho, trata justamente deste tipo de transformação – conversão – de um registro para outro. No caso, trataremos da conversão da escrita algébrica para a gráfica.

A proposta de uma atividade que proporcione aos estudantes a coordenação entre diferentes registros de representações semióticas se baseia em dois importantes aspectos destacados por Duval (2012). Por um lado, o autor destaca a economia de trabalho, explicando que “a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada” (p. 279). Por outro lado, a complementaridade dos registros, ao lembrar que “toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados” (p. 280).

### 3 O software GeoGebra

O uso de ferramentas tecnológicas na aprendizagem de matemática é uma tendência na Educação Matemática não somente por estar inserido no contexto de inovações tecnológicas contemporâneas, mas especialmente pelo rico potencial que sua utilização promove. Gravina e Basso (2010) explicam que,

A tecnologia digital coloca à nossa disposição ferramentas interativas que incorporam sistemas dinâmicos de representação na forma de objetos concretoabstratos. São concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados e são abstratos porque respondem às nossas elaborações e construções mentais. (Gravina, Basso, 2010, p. 14).

O GeoGebra possui inúmeras ferramentas para as mais diferentes áreas da matemática. Inicialmente voltado ao estudo da geometria em duas dimensões e da álgebra, hoje também possui ambiente de geometria espacial, planilhas eletrônicas, estudo de probabilidades, entre outros. Ainda, trata-se de um software livre e com ambiente de compartilhamento de trabalhos – o *GeoGebra Tube*.

A ênfase dada neste trabalho é a respeito da geometria analítica, que relaciona a geometria com a álgebra. Gravina, Barreto, Dias e Meier (2010) enfatizam as possibilidades do estudo de geometria analítica com a utilização deste software, destacando que isso se observa a partir do

Próprio nome do software que funde geometria (Geo) com álgebra (Gebra). Com o GeoGebra também é possível trabalhar as figuras sob o ponto de vista analítico. Para isso, basta selecionar os menus “Exibir Eixos” e “Exibir Janela de Álgebra” e aos objetos geométricos construídos são associados, por exemplo, as coordenadas dos pontos, as equações das retas, as equações dos círculos. (Gravina, Barreto, Dias e Meier, 2010, p. 44).

A figura 1 apresenta um exemplo de representação de objetos no plano cartesiano no GeoGebra, construídos a partir de suas equações.

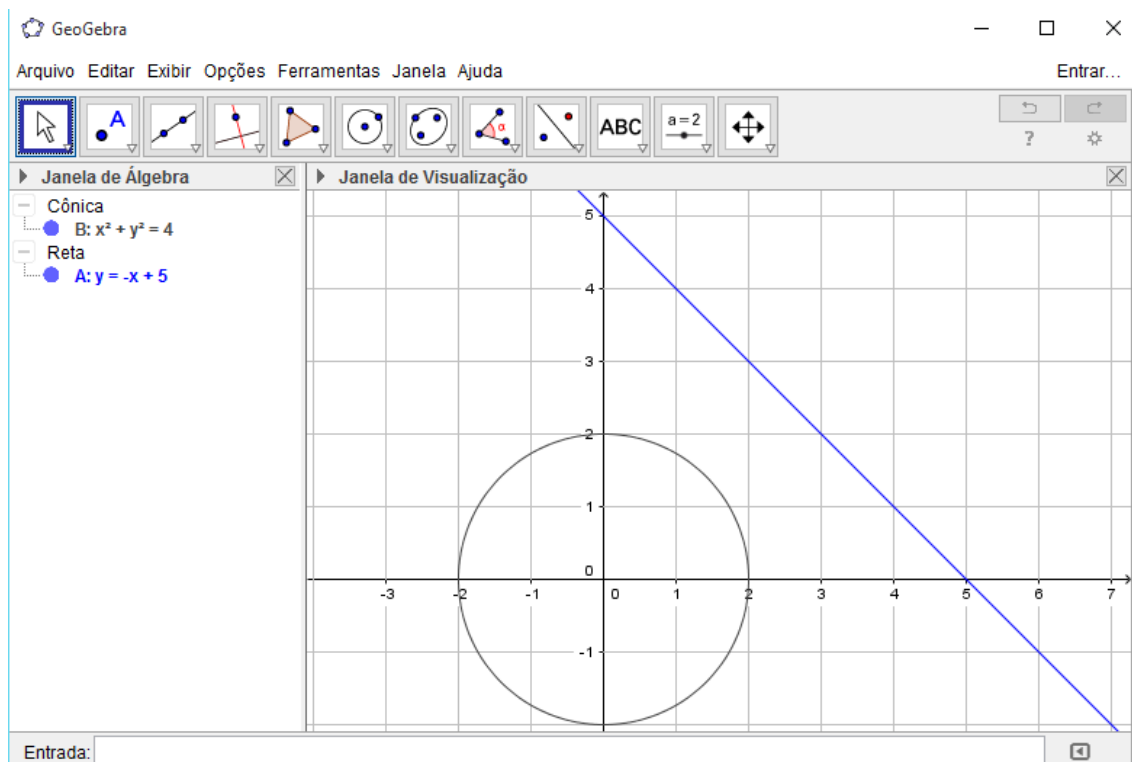


Figura 1 - Reta e circunferências representadas no GeoGebra, construídas a partir de suas equações

A atividade proposta, e que será descrita a seguir, trata da possibilidade de utilização de uma ferramenta tecnológica visando a conversão de registros de representações semióticas. Analisamos pesquisas relevantes que vão ao encontro desta forma de atividade, como a proposta por Halberstad e Fioreze (2015), que contempla a representação de estruturas arquitetônicas utilizando o software GrafEq e que faz uso contínuo de conversões entre escrita algébrica e gráfica.

#### 4 Metodologia e Pesquisa

Realizamos a pesquisa com alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio do Colégio Monteiro Lobato, escola da rede privada de Porto Alegre/RS. A atividade foi organizada com duração de uma hora-aula utilizando o laboratório de informática. Planejada a partir da Teoria dos Registros de Representações Semióticas, nosso interesse era avaliar a forma como a utilização do GeoGebra contribuiria na aprendizagem dos objetos dos problemas propostos.

A pesquisa teve caráter qualitativo, dado o objetivo de analisar a compreensão dos objetos geométricos estudados a partir das diferentes representações semióticas, as quais sejam, algébrica e gráfica. Os dados foram coletados a partir de diário de bordo do professor e da produção dos alunos – que salvaram as imagens produzidas e as condensaram em arquivos de texto ou apresentação de slides.

Participaram da pesquisa vinte e dois alunos, sendo dispostos em onze duplas, cada dupla contando com um computador. A aula foi desenvolvida num contexto de aprendizagens de conceitos de geometria analítica – posições relativas entre pontos, retas e circunferências –, após aulas expositivas e de resolução de exercícios de sistematização já ocorridas. Nessas aulas, mesmo que com incentivo por parte do professor – autor da pesquisa e professor da turma – na constante conversão dos registros de representação, preferencialmente os estudantes utilizavam representações algébricas. Um dos motivos para isso, segundo falas de alguns estudantes, consistia na dificuldade em representar os objetos no plano, mesmo que contando com instrumentos como régua e compasso.

Foram propostas quatro atividades, cujos enunciados mostramos no quadro a seguir:

**Atividade 1**

Reproduzir no software a circunferência de equação  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$  e a reta de equação  $y = -x + 5$ , e responda: quais os pontos de interseção entre a reta e a circunferência?

**Atividade 2**

Resolva a seguinte questão do CV UFRGS 2015

Considere as circunferências definidas por  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$  e  $y = -x + 5$  representadas no mesmo plano cartesiano. As coordenadas do ponto de interseção entre as circunferências são

- (A) (7, 2) .
- (B) (2, 7) .
- (C) (10, 3) .
- (D) (16, 9) .
- (E) (4, 3) .

**Atividade 3**

Resolva a seguinte questão do CV UFRGS 2014

A área de um quadrado inscrito na circunferência de equação  $x^2 - 2y + y^2 = 0$  é

- (A)  $\frac{1}{2}$
- (B) 1
- (C)  $\sqrt{2}$
- (D) 2
- (E)  $2\sqrt{2}$

**Atividade 4**

Resolva a seguinte questão do CV UFRGS 2014

Construídas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, as inequações  $x^2 + y^2 < 4$  e  $y < x + 1$  delimitam uma região no plano. O número de pontos que estão no interior dessa região e possuem coordenadas inteiras é

- (A) 5.
- (B) 6.
- (C) 7.
- (D) 8.
- (E) 9.

**5 Análise de resultados**

Os alunos já conheciam, embora com baixo grau de profundidade, o software GeoGebra. A familiaridade se deve a utilização do software com os estudantes na

aprendizagem de funções trigonométricas no ano anterior e em tópicos de geometria plana e espacial estudados anteriormente neste ano. Mesmo assim, alguns alunos apresentaram dificuldades pontuais na utilização de alguns recursos do software, o que se é perfeitamente natural, visto que a sua utilização – ao contrário do que desejamos – ainda não se faz tão frequente e, portanto, os alunos acabam por não lembrar alguns processos do ponto de vista técnico.

Quanto à realização das atividades, quase a totalidade de duplas resolveu com sucesso os quatro problemas propostos. Evidentemente, houve espaço para trocas entre estudantes e entre estudantes e professor quanto a estratégias a serem utilizadas e, também, quanto a ferramentas do GeoGebra que poderiam melhor executar uma tarefa pretendida.

A seguir, apresentamos imagens das produções dos alunos, retiradas de materiais organizados por eles em editores de textos ou de apresentações de slides, originadas a partir do congelamento das imagens mostradas na janela de visualização do GeoGebra. As falas dos estudantes – tanto em discurso direto quanto indireto – foram alteradas para títulos de preservação da norma culta.

A figura 2 apresenta a resolução da atividade 1, construídas pelas alunas A e B. Segundo falas de estudantes, a representação da circunferência e da reta, separadas de si, já era bem concebida por eles, contudo a utilização do software e a presença da malha quadriculada auxilia no processo de visualização.

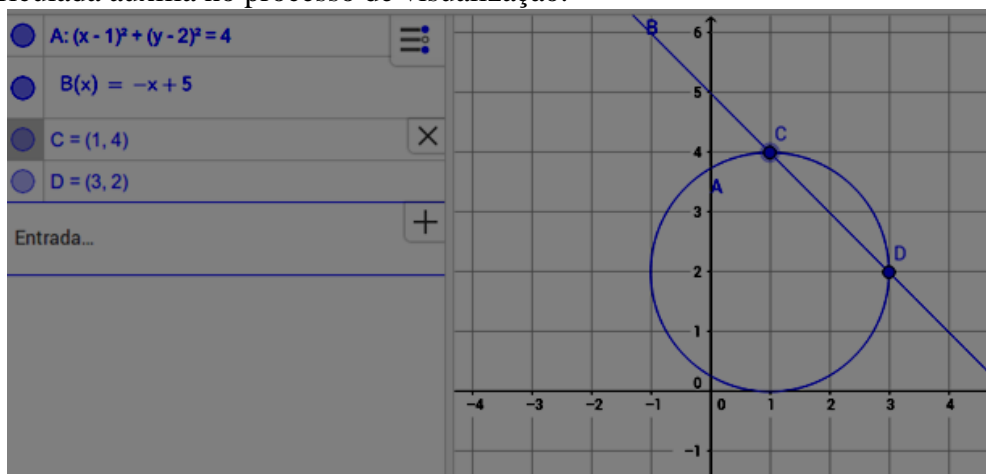


Figura 2 - Resolução da atividade 1, construída pelas alunas A e B

A figura 3 apresenta a resolução da atividade 2, construída pelos alunos C e D, que afirmaram que “claro que no vestibular não se pode usar o GeoGebra, mas agora

pode-se perceber a importância de representar os objetos de forma gráfica construindo uma malha quadriculada adequada”.

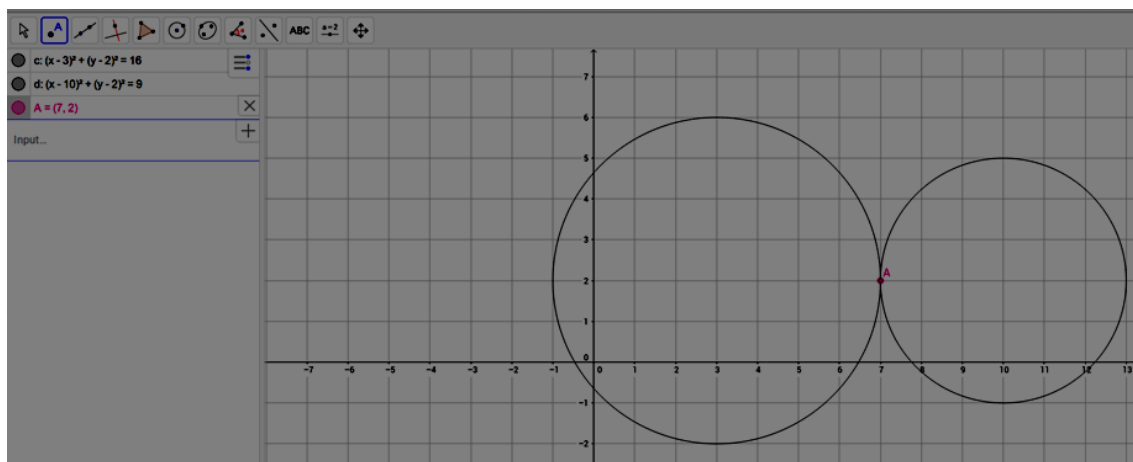


Figura 3 - Resolução da atividade 2, construída pelos alunos C e D

A figura 4 apresenta a resolução da atividade 3, construída pelos alunos E e F. Esses relataram não ter sido natural a construção do quadrado na posição indicada na figura, tendo chegado a esta ideia após discussão com outras duplas. Porém, afirmaram que já haviam percebido que o quadrado teria lado com medida  $\sqrt{2}$ , tendo feito esta descoberta a partir de resolução algébrica, relacionando o lado do quadrado inscrito com o raio da circunferência – a propriedade lado = raio  $\times \sqrt{2}$ , já conhecida por eles. Foi sugerido aos estudantes destacarem a medida do lado do quadrado, preservando a história de sua descoberta.

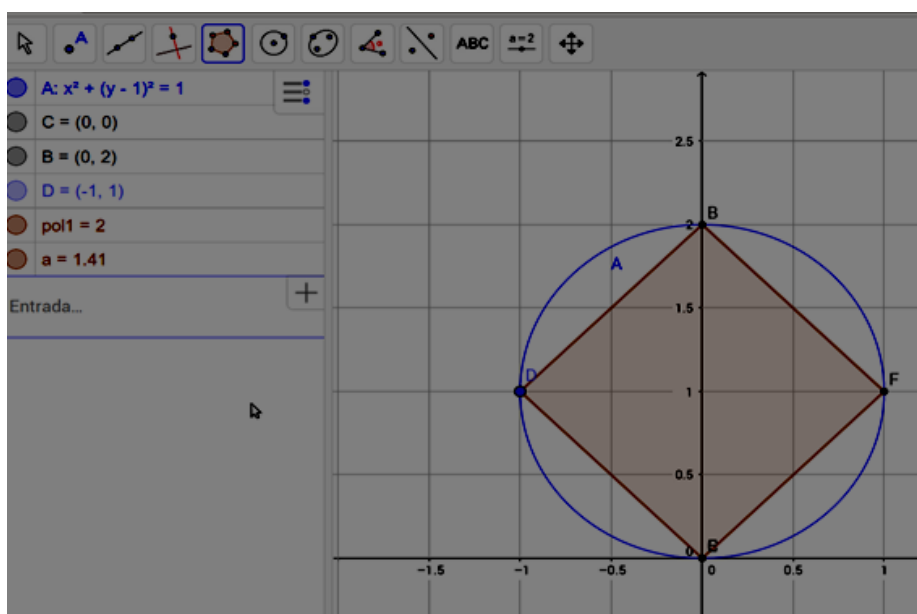


Figura 4 - Resolução da atividade 3, construída pelos alunos E e F

Constatamos que o desenvolvimento da atividade 3 pelos estudantes retrata um aspecto relevante da Teoria dos Registros de Representações Semióticas: a complementaridade dos registros. Duval (2012) destaca que

A natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa. Esta escolha é feita em função



das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. (...) de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados. (p. 280)

No caso, os estudantes obtiveram a medida do lado do quadrado a partir da representação algébrica e, através de uma conversão, traduziram tal informação para a representação gráfica, finalizando a resolução do problema.

A figura 5 apresenta a resolução da atividade 4, construída pelas alunas A e B, que afirmaram que “a solução deste problema somente é acessível, pensando numa resolução econômica, a partir da representação gráfica, pois não sabemos como seria a resolução algébrica”.

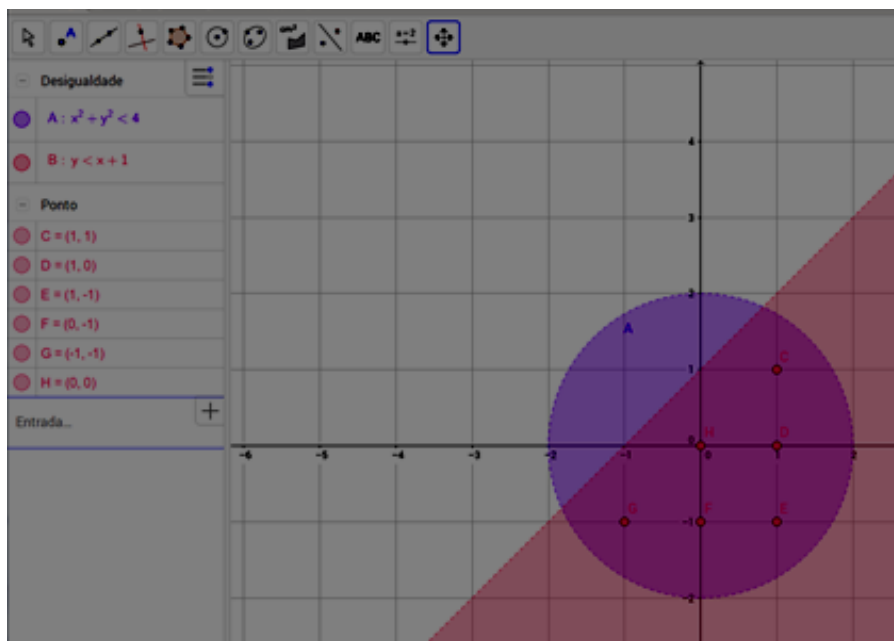


Figura 5 - Resolução da atividade 4, construída pelas alunas A e B

A afirmação relatada a respeito da atividade 4 está alinhada com a teoria de Duval, no sentido por Duval (2012), que aponta que “a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada” (p. 279). Também se destaca a complementaridade dos registros, no sentido de as estudantes não compreenderem a resolução deste problema de forma algébrica, portanto o resolveram de forma gráfica.

## 6 Considerações finais

Apresentamos ao longo deste trabalho o relato de experiência relativo a atividades desenvolvidas em ambiente informatizado com alunos do terceiro ano do Ensino Médio a respeito de posições relativas entre pontos, retas e circunferências. Nossa proposta tomou por base a Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e, teve o interesse de, através do dinamismo do software GeoGebra, proporcionar aos estudantes a visualização e compreensão de formas diferentes de registros de representações semióticas dos referidos tópicos.

Foi possível observar desenvoltura dos estudantes nas atividades propostas, mesmo que permeadas por eventuais momentos de dificuldades quanto ao uso do software – absolutamente previsíveis, dado o grau de intimidade com esta ferramenta ainda estar em processo de amadurecimento – e, também, quanto a compreensão dos processos de conversão dos registros. Em relação a este, destaca-se o empenho dos



estudantes e o consequente sucesso, após trocas entre alunos nos pequenos grupos e em discussões amplas com demais colegas e professor.

Avaliamos que as atividades propostas surtiram efeito no âmbito cognitivo, no sentido de promoverem a utilização de dois tipos de registros de representações semióticas, proporcionando assim uma aprendizagem mais consistente e efetiva compreensão dos objetos estudados – tal qual indica a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. Ainda, destacamos que o uso do software GeoGebra foi essencial, auxiliando decisivamente os estudantes na representação dos elementos geométricos, permitindo que eles fizessem as conexões e raciocínios necessários à resolução dos problemas propostos.

Desta forma, é possível afirmar que esta experiência aqui relatada constituiu momentos de aprendizagem diferenciados para os estudantes envolvidos e permitiu ao professor da turma e autor da pesquisa a possibilidade de uma prática-reflexiva, muito relevante na docência e, em especial, no momento de integrante de programa de mestrado no qual se encontra. Espera-se que a experiência relatada possa ser válida para outras propostas inovadoras no ensino e aprendizagem de matemática utilizando tecnologias.

### Referências

- DUVAL, R. Registros de representações semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003. p. 11- 33.
- \_\_\_\_\_. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem.** eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.
- GRAVINA, M. A; BARRETO, M. M.; DIAS, M. T.; MEIER, M. Geometria Dinâmica na Escola. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática** - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, [2010]. p. 13. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/espmat>>. Acesso em: 25 out. 2015.
- GRAVINA, M. A; BASSO, M. V. de A. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, M. A. et al. (Org.). **Matemática, Mídias Digitais e Didática** - tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, [2010]. p. 13. Disponível em: <<http://www.ufrgs.br/espmat>>. Acesso em: 25 out. 2015.
- HALBERSTADT, F. F.; FIOREZE, L. A. O ensino e aprendizagem dos objetos reta e desigualdades com o GrafEq: uma abordagem com vistas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Novas Tecnologias na Educação, RENOTE** v. 13, 2015.
- PALLES, C.; SILVA, M. J. F. da. **Visualização em Geometria Dinâmica**. In: Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012, São Paulo. Encontro de Produção Discente - PUC/SP-UNICSUL, 2012. p. 1-9.